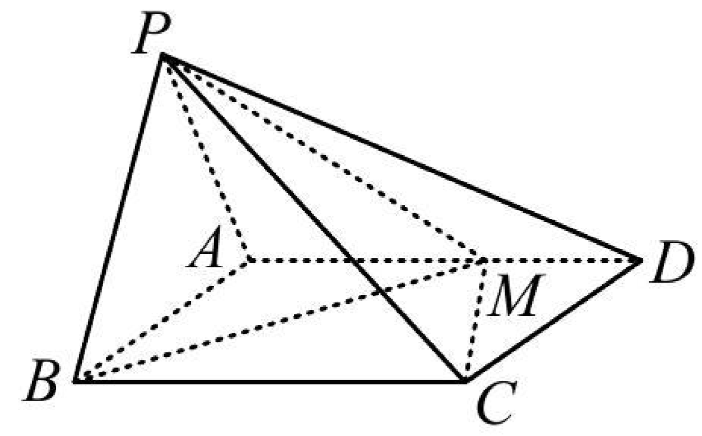
第 3 节 空间向量的应用：求距离（★★★）

强化训练

1．（2023•山西模拟•★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA=PB=\sqrt{5}$，$AB=2$，$AD=3$，M 是棱 AD 上一点，且 $AM=2MD$.

（1）求点 B 到直线 PM 的距离；

（2）求平面 PMB 与平面 PMC 的夹角余弦值.



解：（1）（条件中有平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，先找与交线 AB 垂直的直线，构造线面垂直，便于建系处理）

取 AB 中点 O，连接 OP，因为 $PA=PB=\sqrt{5}$，$AB=2$，

所以 $OP\perp AB$，且 $OA=OB=1$，$OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=2$，

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$OP\subset$ 平面 PAB，$OP\perp AB$，所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$，

建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$P(0,0,2)$，

因为 $AM=2MD$，$AD=3$，所以 $AM=2$，故 $M(-1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{PM}=(-1,2,-2)$，

（算点到直线的距离要用直线的单位方向向量，先求它）

直线 PM 的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3})$，

由内容提要第 1 点的公式，点 B 到直线 PM 的距离 $d=\sqrt{\overrightarrow{BP}^2-(\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{5-(-1)^2}=2$.

（2）$C(1,3,0)$，所以 $\overrightarrow{MC}=(2,1,0)$，设平面 PMB，PMC 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+2z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PM}=-x_1+2y_1-2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$，则 $\begin{cases}y_1=2\\ z_1=1\end{cases}$，

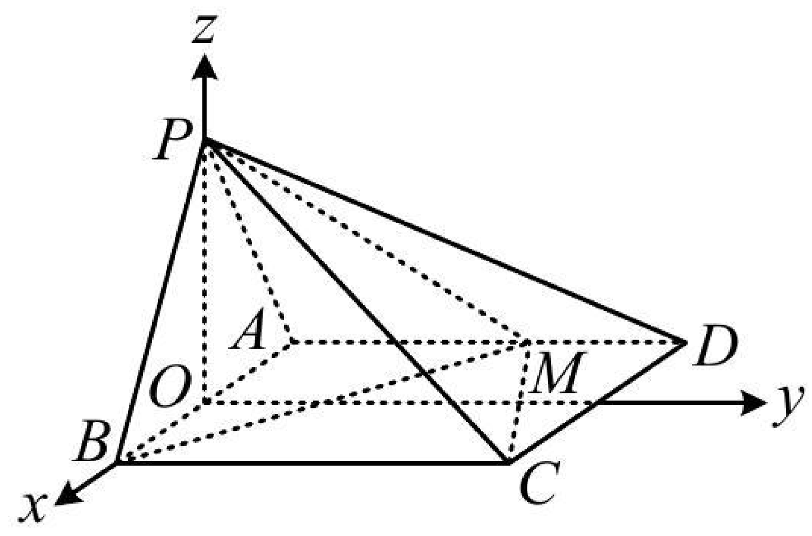
所以平面 PMB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=-x_2+2y_2-2z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=2x_2+y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=2$，则 $\begin{cases}y_2=-4\\ z_2=-5\end{cases}$，

所以平面 PMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-5)$，

从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

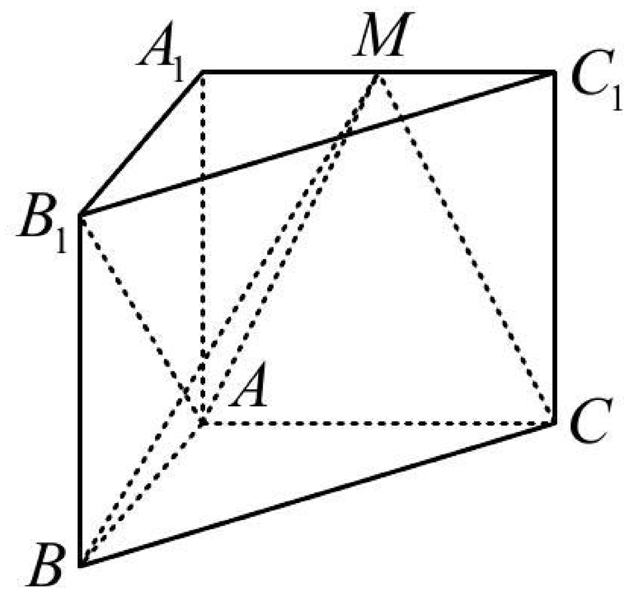
故平面 PMB 与平面 PMC 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



2.（2022 •滕州模拟 •★★★）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=1$，M 为线段 A_1C_1 上一点.

（1）求证：$BM\perp AB_1$；

（2）若直线 AB_1 与平面 BCM 所成的角为 45°，求点 A_1 到平面 BCM 的距离.



解：(1)（第 1 问能用几何法，只需证 $AB_1\perp$面 A_1BM，但考虑到图中有 3 条两两垂直的直线，故也可直接建系证明，这样有关点的坐标第（2）问可以接着用）

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B_1(1,0,1)$，$B(1,0,0)$，因为 M 在线段 A_1C_1 上运动，所以可设 $M(0,a,1)$，其中 $0\le a\le 1$，

从而 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,a,1)$，

故 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BM}=1\times(-1)+0\times a+1\times 1=0$，所以 $BM\perp AB_1$.

（2）（给出了 AB_1 与平面 BCM 所成的角，可由向量法求出该线面角的余弦值，从而建立方程，求得 M 的坐标）

由图可知 $C(0,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，设平面 BCM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=-x+ay+z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1-a$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1-a)$ 是平面 BCM 的一个法向量，

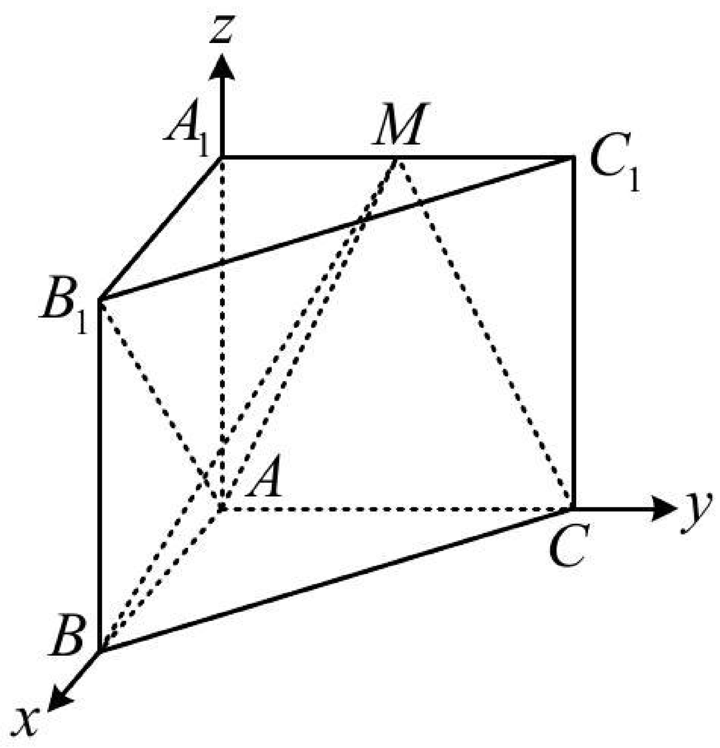
因为 AB_1 与平面 BCM 所成的角为 45°，

所以 $|\cos<\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+(1-a)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得：$a=\dfrac{1}{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\dfrac{1}{2})$，

又 $A_1(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-1,0,1)$，

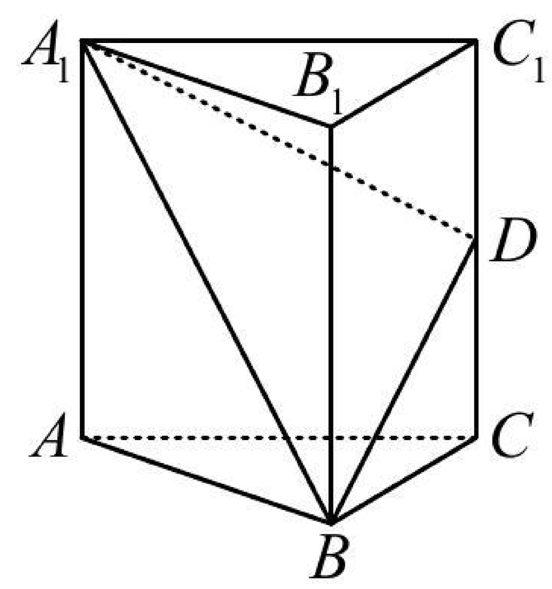
故点 A_1 到平面 BCM 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{3}$.



3．（2023·乾县模拟·★★★）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=AA_1$，D 为 CC_1 的中点.

（1）证明：平面 $A_1BD\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $\angle ACB=90^{\circ}$， $AB=2$，求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.



解：(1)（证面面垂直，利用逆推的思路，上一步是找线面垂直，先过 D 或 A 作交线 A_1B 的垂线，分析已知条件不难发现 $A_1D=BD$，故选前者更易证）

取 A_1B 中点 E，连接 DE，设 $AC=BC=AA_1=2a$，

则 $CD=C_1D=a$， $A_1D=\sqrt{A_1C_1^2+C_1D^2}=\sqrt{5}a$，

$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{5}a$，所以 $A_1D=BD$，故 $DE\perp A_1B$ ①，

（另一条直线选谁呢？AB 和 AA_1 均可，不妨选 AB. 由三垂线定理，只需证 $AB\perp DE$ 在面 ABC 内的射影，故先作射影，可发现 E 在面 ABC 内的射影是 AB 中点 F）

取 AB 中点 F，连接 EF，CF，则 $EF/\!/AA_1$ 且 $EF=\frac{1}{2}AA_1$，

又 D 为 CC_1 的中点，所以 $CD/\!/AA_1$ 且 $CD=\frac{1}{2}AA_1$，

故 $EF/\!/CD$ 且 $EF=CD$，所以 $CDEF$ 是平行四边形，

故 $DE/\!/CF$，因为 $AC=BC$，所以 $AB\perp CF$，

结合 $DE/\!/CF$ 可得 $AB\perp DE$ ②，

由①②以及 A_1B，AB 是平面 ABB_1A_1 内的相交直线可得 $DE\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $DE\subset$ 平面 A_1BD，所以平面 $A_1BD\perp$ 平面 ABB_1A_1.

（2）（算点到平面的距离，建系，用内容提要第 2 点的公式计算即可）

建立如图所示的空间直角坐标系，由 $AB=2$， $AC=BC$，

$\angle ACB=90^{\circ}$ 可得 $AC=BC=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=\sqrt{2}$，

故 $B_1(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$， $A_1(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$， $B(0,\sqrt{2},0)$， $D(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

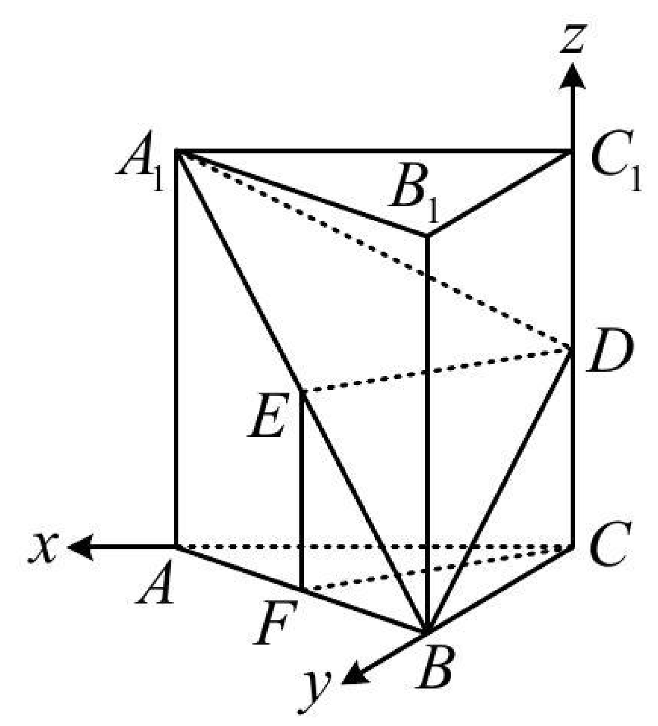
所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,\sqrt{2})$， $\overrightarrow{BD}=(0,-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$， $\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{2}y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\begin{cases}x=-1\\ z=2\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$ 是平面 A_1BD 的一个法向量，

故点 B_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

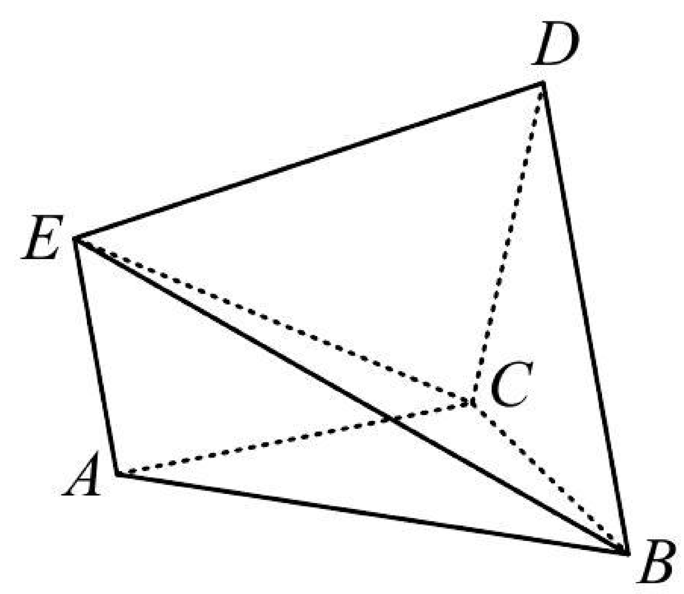


【反思】取中点连线是最常见的作辅助线方法，若没有思路，不妨尝试取中点.

4．（2023•泸县模拟•★★★）如图，在多面体 $ABCDE$ 中，ΔABC，ΔBCD，ΔCDE 都是边长为 2 的正三角形，平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $CDE\perp$平面 BCD.

（1）求证：$AE\parallel BD$；

（2）求点 B 到平面 ACE 的距离.



解：(1)（有两个面面垂直，想到作交线的垂线构造线面垂直，作出来就发现有平行四边形）

如图，取 BC 中点 G，CD 中点 F，连接 EF，FG，AG，

因为 ΔABC，ΔCDE 是边长为 2 的正三角形，

所以 $AG=EF=\sqrt{3}$，且 $AG\perp BC$，$EF\perp CD$，

又平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$，

$AG\subset$平面 ABC，所以 $AG\perp$平面 BCD，同理，由平面 $CDE\perp$平面 BCD 可得 $EF\perp$平面 BCD，

所以 $EF\parallel AG$ 且 $EF=AG$，从而四边形 $AEFG$ 是平行四边形，故 $AE\parallel FG$，又 $FG\parallel BD$，所以 $AE\parallel BD$.

（2）连接 DG，则 $DG\perp BC$，结合平面 $ABC\perp$平面 BCD 可得 $DG\perp$平面 ABC，所以 AG，GB，GD 两两垂直，

以 G 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(0,1,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,-1,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},1,0)$，

（求平面 ACE 的法向量还需 $\overrightarrow{AE}$ 或 $\overrightarrow{CE}$，不妨用 $\overrightarrow{AE}$，若写 E 的坐标，就得找它在面 ABC 内的投影，较为麻烦，可借助平行关系将 $\overrightarrow{AE}$ 转化为好算的向量来求，如 $\overrightarrow{BD}$）

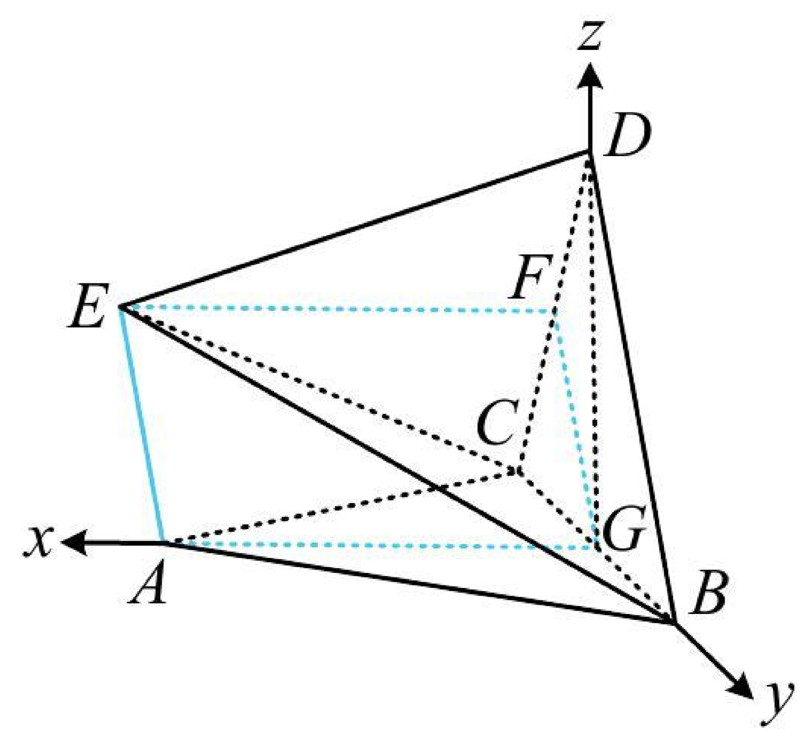
由（1）可得 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(0,-1,\sqrt{3})=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=\sqrt{3}x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}\\ z=-1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$ 是平面 ACE 的一个法向量，

故点 B 到平面 ACE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

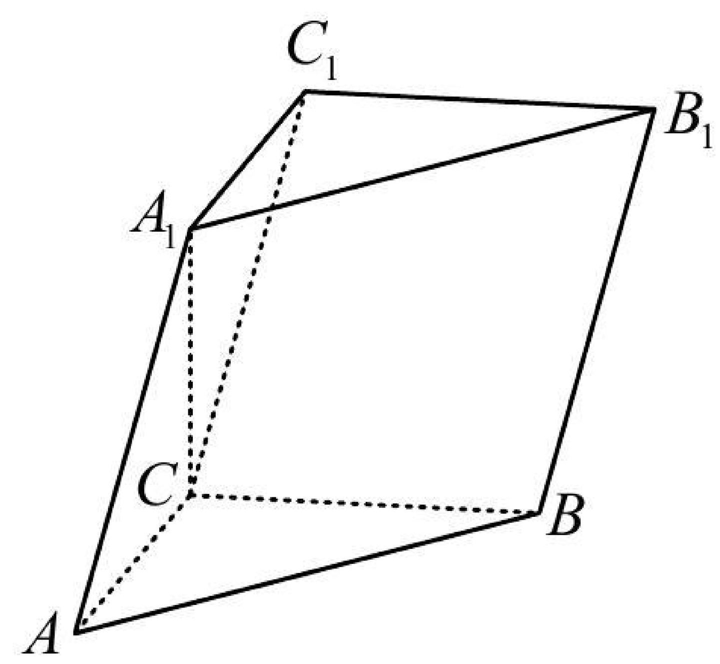


【反思】在求向量坐标时，若遇到某些点的坐标不好找，不妨考虑借助平行关系转化为好求的向量来算.

5.（2023•全国甲卷•★★★★）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90^{\circ}$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

（1）证明：$AC=A_1C$；

（2）若直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



解：(1)（题干给出 A_1 到面 BCC_1B_1 的距离为 1，此条件怎么用？由题意不难发现 $BC\perp$ 面 ACC_1A_1，于是面 $BCC_1B_1\perp$ 面 ACC_1A_1，故由面面垂直的性质定理，过 A_1 易作面 BCC_1B_1 的垂线，只需作交线 CC_1 的垂线即可）

如图，作 $A_1D\perp CC_1$ 于点 D，由题意，$A_1C\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp A_1C$，

又 $BC\perp AC$，且 AC，$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AC\cap A_1C=C$，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，

因为 $A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $A_1D\perp BC$，

结合 $A_1D\perp CC_1$ 可得 $A_1D\perp$ 平面 BCC_1B_1，

（由 A_1D 的长恰为 CC_1 的一半可联想到直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，由此能证 A_1D 是中线，根据三线合一就可证得 $A_1C=A_1C_1$，故结论成立）

因为 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1，所以 $A_1D=1$，

又 $AA_1=2$，所以 $CC_1=2$，

由 $A_1C\perp$ 平面 ABC 可得 $A_1C\perp AC$，又 $A_1C_1\,/\!/\,AC$，

所以 $A_1C \perp A_1C_1$，结合 $A_1D = \frac{1}{2}CC_1$ 可得 D 为 CC_1 的中点，

又 $A_1D \perp CC_1$，所以 $A_1C = A_1C_1$，

因为 $AC = A_1C_1$，所以 $A_1C = AC$.

（2）（条件中本身就有三条两两垂直的直线，故可直接建系处理）

以 C 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

由（1）的结论可得 ΔAA_1C 是等腰直角三角形，

因为 $AA_1 = 2$，所以 $AC = A_1C = \sqrt{2}$，

（要写涉及到的点的坐标，还差 BC 的长，可设为未知数，用直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2 来求解）

设 $BC = a(a > 0)$，则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B(0,a,0)$，

所以 $\overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{2},a,0)$，

故直线 AA_1 的单位方向向量为 $\boldsymbol{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，

它也是直线 BB_1 的方向向量，所以点 A 到直线 BB_1 的距离

$d = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{u})^2} = \sqrt{2 + a^2 - 1} = \sqrt{a^2 + 1}$，

因为直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，所以点 A 到直线 BB_1 的距离为 2，即 $\sqrt{a^2+1} = 2$，从而 $a = \sqrt{3}$，故 $B(0,\sqrt{3},0)$，

（求目标需用 B_1，C_1 的坐标，找它们在面 ABC 的投影较麻烦，可用向量的线性运算来回避这一难点）

所以 $\overrightarrow{CB} = (0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = (-\sqrt{2},\sqrt{3},0) + (-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

$= (-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，

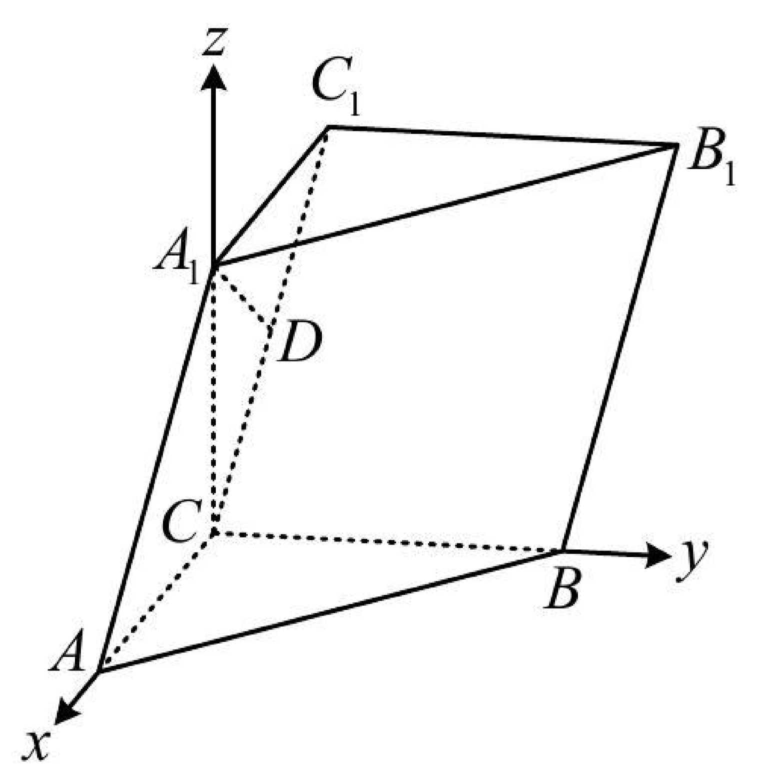
设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{3}y = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$，令 $x = 1$，则 $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n} = (1,0,1)$ 是平面 BCC_1B_1 的一个法向量，

从而 $\left|\cos < \overrightarrow{AB_1}, \boldsymbol{n} >\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB_1} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{\sqrt{13}}{13}$，

故直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.



【反思】其实第 1 问也可建系翻译所给的点到平面的距离，但在未证出 $AC = A_1C$ 前，AC，A_1C，BC 长度都未知，需设三个未知数，较麻烦，故没用这种方法.